به نام زندگی

## تعریف احتمال (تابع احتمال)

همان طور که گفتیم، برای به دست آوردن احتمال هر پیش آمدی در فضای نمونه، می توانیم آن را به صورت اجتماع یا اشتراک چندین پیش آمد ساده تر بنویسیم و با کمک روابط و قضیه ها، احتمال آن را به دست بیاوریم.

در ادامه برای ساده تر شدن بحث ها، فضای نمونه را شمارش پذیر در نظر می گیریم ولی بحث های انجام شده، قابل تعمیم به حالتی که فضای نمونه شمارش ناپذیر باشد، نیز خواهد بود.

بنابراین فرض می کنیم که فضای نمونه به صورت

$$\Omega = \{ \xi_1 , \xi_2 , \dots , \xi_n \}$$

قابل بیان باشد.

در این فضای نمونه، پیش آمدهای ساده را پیش آمدهایی در نظر می‌گیریم که تنها دارای یک عضو باشند یعنی

$$A_i = \{\xi_i\} \quad , \quad \forall i \neq j \; ; \; A_i \cap A_j = \phi$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$

$$\Rightarrow \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(\Omega) = 1$$

⇐ همواره می‌توانیم پیش‌آمدها را در فضای نمونه به صورت اجتماع یا اشتراک چندین پیش‌آمد ساده (ساده‌تر) بنویسیم و احتمال آن را محاسبه کنیم.

همان طور که دیدیم، نکات بالا به راحتی قابل تعمیم به حالت نامحدود (شمارش‌پذیر) است. برای حالت شمارش‌ناپذیر، با در نظر گرفتن ویژگی‌های خاص فضاهای شمارش‌ناپذیر، می‌توانیم مطلب بالا را تعمیم دهیم.

## مثال برای حالت شمارش ناپذیر

فرض کنیم آزمایش تصادفی ، اندازه گیری جریان عبوری از یک مقاومت در یک مدار الکتریکی است که مقدار آن را در بازه‌ی $\Omega = [\alpha_1 , \alpha_2]$ اختیار می کند. در این آزمایش تصادفی ، احتمال نقاط ، برابر صفر است یعنی

$$P_r \{ I = \alpha \} = 0$$

$$\alpha \in [\alpha_1 , \alpha_2]$$

ولی این پیش آمد ، غیرممکن نیست

در این حالت از مفهوم چگالی احتمال کمک می‌گیریم و احتمال پیش آمدهایی که به صورت زیر مجموعه‌ای از $\Omega = [\alpha_1 , \alpha_2]$ هستند را به دست می‌آوریم.

$$P_r \{ \xi \in A \} = \int_A \underbrace{f_x(x)}_{\text{تابع چگالی احتمال}} dx$$

چگالی توزیع احتمال در بازه $\Omega$

$$A \subseteq \Omega$$

$$A = (\beta_1 , \beta_2) \subseteq (\alpha_1 , \alpha_2)$$

## تعریف احتمال یک پیش‌آمد (تابع احتمال)

برای اینکه یک تعریف دقیق ریاضی لذا احتمال یک پیش‌آمد به دست بیاوریم، اولین تلاش‌هایی که در راه حساب انجام شد، برپایه تکرار آزمایش‌های تصادفی به مقدار زیاد و محاسبه‌ی احتمال پیش‌آمد مورد نظر به صورت عددی با تقریبی بود که به آن آزمایش Pearson می‌گفتند.

به عنوان در آزمایش پرتاب سکه، این آزمایش را به تعداد مثلاً 100,000 بار تکرار می‌کردند و اگر تعداد رخداد شیرها برابر 50337 می‌بود، احتمال شیر آمدن را برابر

$$P(H) \approx \frac{50337}{100,000}$$

در نظر می‌گرفتند. در واقع احتمال هر پیشامد را به صورت فراوانی نسبی رخداد آن پیشامد در نظر می‌گرفتند. این تعریف از نظر ریاضی دقیق نیست.

زیرا ما مقدار $P(H)=\frac{1}{2}$ که به شکل ذهنی می‌شناسیم، یکسان نیست و علاوه بر این به تعداد آزمایش‌های صادر شده آزمایش بستگی دارد. بنابراین تعریف احتمال را به صورت زیر تغییر دادند.

$$P(A) \approx \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$ (تعریف تجربی یا تعریف عددی از احتمال)

$n$ : تعداد کل آزمایش‌ها

$n_A$ : تعداد دفعات رخداد پیش‌آمد مورد نظر

این تعریف نیز از نظر ریاضی دقیق و قابل قبول نیست زیرا همچنان به شرایط آزمایش وابسته است.

تعریف دقیق ریاضی که برای احتمال یک پیشامد $A$ بر روی یک فضای نمونه‌ای وجود دارد، به صورت زیر است،

$$P(A) = P_A = P_r\{A\} = \frac{N_A}{N}$$

که در آن

$N_A$ : تعداد حالت‌های موردنظر (با توجه به مجموعه‌ی $A$ و $A \subseteq \Omega$)

$N$ : کل تعداد حالت‌های ممکن (با توجه به فضای نمونه $\Omega$)

به عنوان مثال، در آزمایش پرتاب سکه، داریم

$$\Omega = \{H, T\}$$

$$A_1 = \{H\} \longrightarrow P(A_1) = \frac{1}{2} = \frac{N_{A_1}}{N}$$ (پیشامد ساده)

$$N_{A_1} = |A_1| \ , \qquad N = |\Omega|$$

$$A_2 = \{T\} \longrightarrow P(A_2) = \frac{N_{A_2}}{N} = \frac{1}{2}$$ (پیشامد ساده)

$$N_{A_1} = |A_1| = 1$$

مثال: در آزمایش پرتاب تاس داریم $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$

$A_i = \{i\}, \qquad i = 1, 2, \dots, 6$

$\Rightarrow P(A_i) = \dfrac{N_{A_i}}{N} = \dfrac{1}{6}$ (پیشامدهای ساده)

$N_{A_i} = |A_i| = 1 \quad , \quad N = |\Omega| = 6$

احتمال اینکه در آزمایش پرتاب تاس، عدد ظاهر شده فرد باشد

$$B = \{1, 3, 5\}$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{N_B}{N} = \frac{3}{6}$$

$$N_B = |B| = 3$$

توجه: این نکته لازم است که در این آزمایش‌ها، پیش‌آمدهای ساده را هم احتمال در نظر گرفته‌ایم. اگر چنین شرطی برقرار نباشد، در صورت مسأله ذکر می‌شود.

• به‌عنوان مثال اگر یک تاس 6 وجهی داشته باشیم که در آن احتمال رخ‌داد وجه 2، سه برابر بقیه وجه‌ها باشد، احتمال هر یک از پیش‌آمدهای ساده را حساب کنید.

$$A_i = \{i\} \quad , \quad \bigcup_{i=1}^{6} A_i = \Omega ,$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{6} A_i\right) = \sum_{i=1}^{6} P(A_i) = P(\Omega) = 1$$

$$P(A_1) = x = P(A_3) = \dots = P(A_6) \quad , \quad P(A_2) = 3x$$

$$\Longrightarrow \quad 3x + 5x = 1 \longrightarrow x = \frac{1}{8} \longrightarrow P(A_2) = \frac{3}{8}$$

$$P(A_i) = \frac{1}{8} \quad i \neq 2$$

در مسئله قبل احتمال اینکه عدد ظاهر شده، زوج باشد چقدر است؟

$$P(B) = P_r\{2, 4, 6\} = P(A_2) + P(A_4) + P(A_6)$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

مثال: یک تاس سالم را دو بار پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه حاصلجمع عددهای ظاهر شده، برابر ۱۵ باشد را حساب کنید.

$$\underbrace{\Omega_1}_{\text{پرتاب اول}} = \{1, 2, \ldots, 6\} \quad , \quad \underbrace{\Omega_2}_{\text{پرتاب دوم}} = \{1, 2, \ldots, 6\}$$

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,6), \ldots, (6,1), \ldots, (6,6)\}$$

$$= \{(a_i, b_j) \mid a_i, b_j \in \{1, \ldots, 6\}\}$$

پیش آمد : $B$ که

اینکه حاصلجمع عددهای ظاهر شده برابر 10 باشد

$$B = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{N_B}{N} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$N_B = |B| = 3$ , $N = |\Omega| = 6 \times 6 = 36$

با توجه به مطالب گفته شده، برای محاسبه ی احتمال پیش آمدها، لازم است
تعداد حالت های مورد نظر و تعداد حالت های ممکن را به دست بیاوریم.
یکی از تکنیک هایی که به ما کمک می کند، بدون نیاز به نوشتن و شمارش حالتها
تعداد آنها را به دست بیاوریم، استفاده از آنالیز ترکیبی است. بنابراین
در ادامه یک مرور کلی بر آنالیز ترکیبی خواهیم داشت.

## مروری بر آنالیز ترکیبی

### - مفهوم جایگشت    Permutation

تعداد حالت‌های ممکن برای چیدن $n$ شئ در $m$ مکان به طوری که ترتیب آنها اهمیت داشته باشد را جایگشت $n$ شئ در $m$ مکان می‌گوییم و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

| مکان | 1 | 2 | 3 | . . . | m |
|---|---|---|---|---|---|
| حالت‌های ممکن | $N$ | $N-1$ | | | $N-m+1$ |

تعداد حالت‌های ممکن برای چیدن $N$ شئ در $m$ مکان

جایگشت $N$ شئ در $m$ مکان یا

$$P_m^N = N(N-1)(N-2)\cdots(N-m+1) = \frac{N!}{(N-m)!}$$

$$\Rightarrow P_m^N = \frac{N!}{(N-m)!}$$

در مسئله‌ی قبل اگر تکرار شیءها امکان‌پذیر باشد، تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| مکان | 1 | 2 | 3 | ... | m |
| تعداد حالت‌های ممکن | N | N | N | | N |

کل تعداد حالت‌های ممکن $= N^m$

**مثال:** با استفاده از اعداد 1, 3, 4, 5, 7, 9 چند عدد چهار رقمی می‌توان ساخت.

۱- اگر تکرار مجاز نباشد

| 1 | 2 | 3 | 4 | مکان |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 5 | 4 | 3 | حالت‌های ممکن |

کل تعداد حالت‌ها $= 6 \times 5 \times 4 \times 3 = P_4^6 = \frac{6!}{2!}$

۲- اگر تکرار مجاز باشد

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6 | 6 | 6 | 6 |

کل تعداد حالت‌ها $= 6^4$

* تعداد حالت های ممکن برای چیدن $N$ شی در $N$ مکان به طوری که ترتیب آنها اهمیت داشته باشد، برابر است با:

$$P_N^N = \frac{N!}{0!} = N!$$

مثال: مثال قبل را برای حالتی حل کنید که هدف، ساختن اعداد 6 رقمی باشد.

1) کل تعداد حالت های ممکن $= 6! = N!$

2) کل تعداد حالتهای ممکن $= 6^6 = N^N$

* از روابط بازگشتی زیر می‌توانیم برای ساده کردن جواب مسائل استفاده کنیم.

$$N! = N(N-1)!$$

(recursive)

$$P_m^N = (N-m+1)P_{m-1}^N$$